MVA : Séance 6

2 mars 2012
A. Dalalyan.

I. Séance Précédente

On considère le modèle de régression

$$Y_i = f(X_i) + \xi_i \qquad , i = 1, \ldots, n$$

Les observations sont (X_i, Y_i)

Le lien entre Y_i et X_i est modélisé par la fonction de régression f. Cette fonction est inconnue.

$\xi_1, \ldots, \xi_n$ sont les erreurs (de modélisation, de mesures, ...)

Exemples

① Débruitage d'image ou de vidéo

Supposons qu'on dispose d'une image ou d'une video (en niveau de gris) entachée de bruit. On souhaite restaurer cette image ou la video.

Dans le cas de l'image de taille $M \times N$ pixels, on a $n = M \times N$ et chaque $X_i = (x_{1i}, x_{2i})$ est un point de la grille régulière

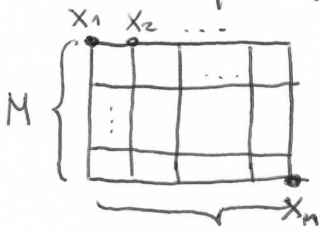
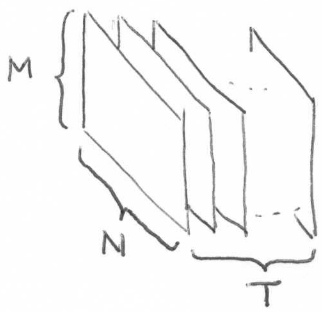


Image de résolution $M \times N$



→ Séquence vidéo de résolution $M \times N$ et de longueur T.

Dans le cas d'une séquence vidéo, il s'agit de T images de résolution $M \times N$, ce qui implique que $X_i = (x_{1i}, x_{2i}, t_i)$ pour $i = 1, \ldots, n = M \times N \times T$.

Dans les deux cas, Y_i est l'intensité lumineuse du pixel X_i ou de voxel X_i. Typiquement, $Y_i \in \{0, 1, \ldots, 255\}$, mais il est plus pratique de considérer Y_i comme une variable qui peut prendre n'importe quelle valeur réelle entre $[0, 255]$.

La fonction f qu'on cherche à estimer est alors l'image ou la video idéale, dont Y est une version entachée de bruit.

② Détection d'objet dans une image (où une séquence video).

Supposons qu'on dispose de n images $I_1, \dots, I_n$ anotées, c'est-à-dire pour chaque I_i on sait si l'objet qui nous intéresse s'y trouve ou ne s'y trouve pas. Cet objet peut être des cellules malades pour l'imagerie médicale, des camps d'entraînement pour les images sattelite ou aéréennes, etc.

Dans ce cas, chaque image I_i est représentée par un vecteur X_i (la représentation la plus simple consiste à lister les intensités lumineuses des pixels de I_i. Ainsi, pour une image couleur (RGB) de résolution $M \times N$, on obtient $X_i \in \mathbb{R}^{3 \times M \times N}$).

Pour chaque i, $Y_i = 1$ si l'objet qui nous intéresse est dans I_i et $Y_i = 0$ sinon.

La fonction de régression f représente alors la probabilité que l'image représentée par le vecteur x contient l'objet qu'on veut détecter.

③ En finance, si l'on veut prédire le cours d'une action en utilisant les données historiques, on pose

$Z_1, \dots, Z_t$ - les prix historiques de l'action qu'on veut prédire.

$X_1, \dots, X_t$ - toutes les variables historiques qu'on trouve pertinentes pour prédire Z (prix d'autres actions, volumes d'actions échangées, le jour de la semaine, la variation du prix intrajournalière)

En général, au lieu de prédire Z_{t+1}, on prédit $Y_{t+1} = \log \frac{Z_{t+1}}{Z_t}$.

L'idée est alors de trouver une fonction f telle que $Y_{t+1} \approx f(X_t)$. Cela revient à faire de la régression sur les données $(X_{t-1}, Y_t), \dots, (X_1, Y_2)$.

Dans le cas où $Y_i = f\left(\frac{i}{n}\right) + \xi_i$ avec $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ de moyenne nulle, on peut se ramener (en projettant f sur une base ON $\{\phi_m : m \in \mathcal{M}\}$ de $L^2([0,1])$) au modèle de suites gaussiennes suivant :

$$Z_m = \theta_m + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \varepsilon_m \quad \text{où} \quad \theta_m = \langle f, \phi_m \rangle \quad \varepsilon_m \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0,1).$$

D'après Parseval,

$$\|f - \hat{f}\|_2^2 = \sum_{m \in \mathcal{M}} |\theta_m - \hat{\theta}_m|^2$$